

CAPITOLO VI*

CRESCITA ECONOMICA E LUNGO PERIODO: I MODELLI DI SOLOW E DI HARROD-DOMAR

1. L'analisi macroeconomica di lungo periodo

Nel corso della storia economica che caratterizza ciascun paese possiamo osservare numerosi periodi caratterizzati da variazioni in aumento della ricchezza nazionale. Il maggiore reddito nazionale disponibile ha permesso a diverse coorti generazionali di poter consumare quantità via via crescenti di beni e servizi, elevando così il tenore di vita dei diversi settori che compongono l'economia.

Peraltro, è noto che non tutti i paesi che compongono il sistema economico globale esibiscano eguali livelli di crescita economica. Tali differenze nel reddito pro capite possono ampliarsi nel corso del tempo, influenzando così i percorsi di sviluppo economico delle società anche per più generazioni di agenti economici.

L'obiettivo del presente capitolo è di comprendere i motivi che stanno alla base di queste differenze di reddito tra i diversi paesi e proporre uno schema teorico che ne spieghi le determinanti e permetta di individuare le politiche economiche più idonee per ridurre i divari nella ricchezza esistenti, garantendo altresì una convergenza verso sentieri di crescita bilanciata di lungo periodo.

Nel prosieguo dell'esposizione, analizzeremo il modello di crescita sviluppato dall'economista R. Solow alla fine degli anni '50 del secolo scorso, che gli valse il Premio Nobel nel 1987. Il modello mostra in che modo il saggio di risparmio, il tasso di crescita della popolazione e il progresso tecnico riescono a influenzare la crescita del prodotto nazionale nel corso del tempo. Ciò permetterà anche di identificare gli strumenti di politica economica che possono influenzare il livello di crescita, stabilendo quanta parte del reddito prodotto debba essere destinata al consumo oggi e quanta se ne dovrebbe risparmiare per il futuro. E poiché i risparmi dell'economia sono uguali agli investimenti, si potrà automaticamente determinare il livello di capitale necessario per allestire la produzione futura, e ricavare il conseguente tasso di crescita di lungo periodo. Una corretta valutazione di tali politiche economiche richiede che siano ben chiari i costi e i benefici derivanti per la società dall'adozione di saggi di risparmio alternativi, e il loro impatto sui livelli di benessere delle diverse generazioni che subiranno gli effetti di tali decisioni.

* Per maggiori approfondimenti, consultare G. Mankiw, *Macroeconomia*, Zanichelli, 2013.

2. Il modello di Solow

Il modello di crescita economica che qui presenteremo ci servirà per comprendere come interagiscono la crescita dello stock di capitale, la crescita della forza lavoro e il progresso tecnico, e come queste possano influenzare il livello del prodotto nazionale. Ai fini della nostra analisi, supporremo in una prima fase che l'ammontare della forza lavoro e la tecnologia produttiva rimangano fisse nel tempo, concentrandoci solamente sul contributo alla crescita derivante dall'accumulazione del capitale utilizzato nei processi produttivi. Aggiungeremo poi gli effetti provocati dalle variazioni della popolazione, lasciando lo studio degli incrementi del progresso tecnico ai successivi percorsi di studio specialistico.

A tal riguardo, è necessario dapprima riconsiderare la funzione di produzione già analizzata nei capitoli precedenti, e indicata in termini generali nella forma

$$(6.1) \quad Y = F(K, L)$$

dove Y rappresenta il prodotto come dipendente dallo stock di capitale, K , e dalla quantità di lavoro, L , utilizzati quali principali fattori della produzione.

Per semplicità espositiva, può risultare utile esprimere la relazione funzionale testé espressa rapportando le quantità all'ammontare della forza lavoro. Come vedremo più avanti, l'utilizzo di funzioni di produzione a rendimenti di scala costanti risultano convenienti a questo scopo. Sarà così facile assumere che se moltiplichiamo entrambe le variabili indipendenti che caratterizzano la funzione in (6.1) per lo stesso fattore $1/L$, anche la variabile dipendente risulterà essere moltiplicata per la stessa quantità

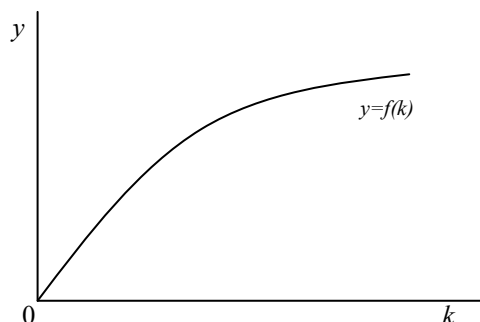
$$(6.2) \quad Y/L = F(K/L, 1)$$

permettendo in questo modo di esprimere il prodotto per lavoratore soltanto in funzione del capitale per lavoratore. Da qui in avanti, utilizzeremo la terminologia di variabile *pro capite* come alternativa alla dizione utilizzata relativa al rapporto per lavoratore. In particolare, ci serviremo dei caratteri minuscoli per indicare le variabili in termini pro capite, cosicché: $y = Y/L$ e $k = K/L$. Pertanto, la funzione di produzione può essere scritta nella forma

$$(6.3) \quad y = f(k)$$

dove $f(k) = F(K/L, 1)$. Ovviamente, anche se espressa in termini pro capite, la funzione di produzione mantiene le caratteristiche economiche previste dalla teoria economica riguardo ai rendimenti marginali decrescenti rispetto a ciascun fattore produttivo. Ciò implica che ciascuna unità addizionale di capitale genera un incremento del prodotto minore dell'unità; ossia che il prodotto aumenta in misura meno che proporzionale rispetto all'incremento di ciascuno dei suoi input. Il tipico andamento della funzione di produzione può essere rappresentato nel grafico 6.1.

GRAFICO 6.1. *La funzione di produzione pro capite*



Ai fini del modello che andremo a presentare, tornerà utile assumere una particolare forma funzionale esplicita nella forma

$$(6.4) \quad Y = K^{\alpha} L^{1-\alpha}$$

dove α determina la quota di reddito che va a remunerare il fattore capitale, mentre $(1-\alpha)$ rappresenta la quota di reddito che remunera il fattore lavoro. La relazione è nota in letteratura economica come funzione di produzione Cobb-Douglas.¹ Poiché essa risulta essere una funzione omogenea di primo grado, ne consegue che la produzione Y esibisce rendimenti decrescenti rispetto a ciascun fattore impiegato. Inoltre, la (6.4) può essere espressa facilmente in termini pro capite, dividendo entrambi i membri per la variabile L , il che ci permette di ottenere l'equazione

$$(6.5) \quad y = k^{\alpha}$$

che costituirà d'ora in avanti il riferimento esplicito della funzione di produzione pro capite del nostro sistema economico, ossia $f(k) = k^{\alpha}$.

Anche dal lato della domanda aggregata, è possibile esprimere l'identità contabile del reddito nazionale in termini pro capite,

$$(6.6) \quad y = c + i$$

dove il reddito per lavoratore, y , viene allocato tra consumi per lavoratore, c , e investimenti per lavoratore, i .²

¹ È facile infatti dimostrare che, in una funzione di produzione Cobb-Douglas, le produttività marginali del capitale e del lavoro possono scriversi nella forma: $PMK = \alpha Y/K$ e $PML = (1-\alpha)Y/L$.

² Ai fini della nostra analisi, non risulta necessaria la scomposizione delle variabili nelle quote di competenza del settore privato e di quello pubblico. Continueremo pertanto con la definizione delle variabili utilizzate in termini aggregati.

Il modello di Solow assume la seguente definizione della funzione del consumo

$$(6.7) \quad c = (1 - s) y$$

dove il saggio di risparmio, s , è un numero compreso tra zero e uno. Necessariamente, quindi, i consumi risultano essere una proporzione fissa del reddito, in base alla propensione marginale al consumo $(1 - s)$, che rappresenta il complemento all'unità della quota di reddito destinata al risparmio.

Sostituendo la (6.7) nella (6.6) è facile ottenere la nuova espressione del reddito

$$(6.8) \quad y = (1 - s) y + i$$

che può essere anche riscritta come

$$(6.9) \quad i = sy$$

da cui si evince l'uguaglianza fra investimenti e risparmi per la chiusura del circuito economico.

3. Il capitale di stato stazionario

Il capitale a disposizione di un sistema economico si modifica nel corso del tempo per mezzo dei nuovi investimenti che ne accrescono lo stock. Poiché però il capitale fisico non ha vita indefinita, dobbiamo considerare nell'analisi che andremo a condurre anche l'effetto di riduzione della vita utile che il deprezzamento del capitale produce sullo stock di risorse accumulate.

Nel modello che si va a costruire, definiamo la quota di deprezzamento (o di ammortamento) del capitale disponibile con il prodotto δk , dove δ rappresenta il tasso di ammortamento.

Possiamo pertanto esprimere la seguente relazione algebrica

$$(6.10) \quad \Delta k = i - \delta k$$

dove la variazione dello stock di capitale, Δk , risulta essere data dalla differenza tra gli investimenti e gli ammortamenti. Infine, utilizzando le definizioni date nella (6.9) e nella (6.3), possiamo riscrivere la (6.10) come

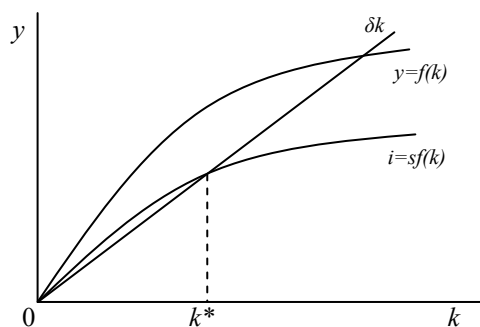
$$(6.11) \quad \Delta k = sf(k) - \delta k$$

che ci permette di esprimere la variazione del capitale in funzione dello stock di capitale esistente, del tasso di ammortamento e, soprattutto, del saggio di risparmio.

La relazione $i = sf(k)$, che definisce il volume degli investimenti, ci fa capire come una variazione positiva dello stock di capitale, oltre a incrementare il prodotto, generi anche un effetto positivo sugli investimenti. Allo stesso modo, un incremento del saggio di risparmio da parte delle famiglie influenza positivamente il volume degli investimenti, per via delle maggiori risorse messe a disposizione per il finanziamento dei piani finanziari e di sviluppo delle imprese.

Con l'intento di visualizzare i concetti sopra esposti, il grafico 6.2 rappresenta congiuntamente l'andamento della funzione di produzione, della funzione degli investimenti e la funzione degli ammortamenti. È possibile notare subito che la funzione degli investimenti non può che seguire lo stesso andamento della funzione di produzione. Infatti, il saggio di risparmio, s , determina il modo in cui il prodotto si ripartisce tra consumi e investimenti. Ovvero, in corrispondenza di una qualsiasi quantità di capitale, k , il prodotto è $f(k)$, gli investimenti (corrispondenti ai risparmi) saranno $sf(k)$, e i consumi $f(k) - sf(k)$. Poiché la funzione di produzione è rappresentata da una curva crescente ma in misura meno che proporzionale rispetto al capitale, la funzione degli investimenti esibirà lo stesso andamento grafico, ma traslata più in basso poiché moltiplicata per il saggio di risparmio, che ricordiamo essere un numero compreso tra zero e uno. Infine, la funzione degli ammortamenti, in quanto definita linearmente crescente rispetto al capitale pro capite, verrà rappresentata da una retta passante per l'origine degli assi e con pendenza pari al coefficiente δ .

GRAFICO 6.2. *L'equilibrio di stato stazionario*



Il grafico 6.2 mostra come vi sia un solo livello di capitale, indicato con k^* , per il quale gli investimenti risultano pari al livello degli ammortamenti. Pertanto, quando nell'economia si raggiunge questo stock di capitale, esso non varierà più nel corso del tempo, perché le forze che agiscono sul suo livello – investimenti e ammortamenti – si bilanciano esattamente. In altre parole, ricordando l'equazione (6.10) per questo livello dello stock di capitale, risulta sempre $\Delta k = 0$. Chiameremo *capitale di stato stazionario* (o di *steady state*) il livello del capitale k^* che ci permette di raggiungere un livello di variazione nulla del capitale accumulato.

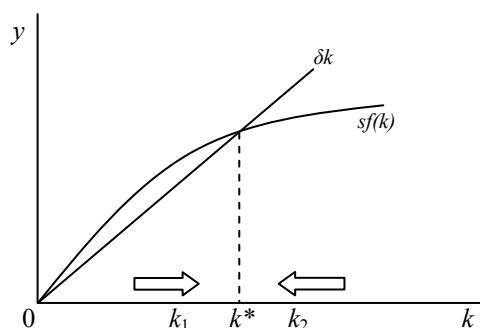
4. La tendenza allo stato stazionario

La condizione di *steady state* testé individuata rappresenta quindi l'equilibrio di lungo periodo dell'economia, ossia il livello di capitale verso cui perverrà il sistema economico, indipendentemente dal suo ammontare iniziale a disposizione.

Supponiamo, infatti, che lo stock di capitale di partenza sia al di sotto del suo livello di stato stazionario, ad esempio che sia pari a k_1 nel grafico 6.3. In questo caso, è facile notare che la curva degli investimenti superi la retta degli ammortamenti. Pertanto, nel corso del tempo, lo stock di capitale continuerà a crescere, unitamente al prodotto, finché non verrà raggiunto il livello di stato stazionario, k^* .

Analogamente, supponiamo che lo stock di capitale all'inizio sia pari a k_2 , e quindi superiore al livello di steady state. In tal caso, gli investimenti risulteranno inferiori agli ammortamenti: il capitale che giunge al termine della sua vita economica non viene interamente rimpiazzato. Come conseguenza, avremo una contrazione dello stock di capitale a disposizione, e il suo livello tenderà a riavvicinarsi al suo livello di equilibrio, k^* . Una volta che lo stock di capitale raggiunge il suo livello di stato stazionario, gli investimenti risultano uguali agli ammortamenti, e lo stock di capitale non aumenta né diminuisce, ossia $\Delta k = 0$.

GRAFICO 6.3. *La tendenza allo steady state*



Quanto detto può trovare verifica nella storia economica di quei paesi che, fuoriusciti dalla seconda guerra mondiale, hanno sperimentato forti risultati di crescita nella fase della ricostruzione post bellica. Prendiamo, ad esempio, il caso del Giappone e della Germania. Entrambi i paesi uscirono dalla guerra con una immane distruzione dello stock di capitale esistente. Nei decenni successivi alla fine della guerra, i due paesi sperimentarono tassi di crescita tra i più elevati mai registrati. Tra il 1948 e il 1972, il PIL pro capite aumentò in media dell'8,2% all'anno in Giappone e del 5,7% all'anno in Germania, contro il 2,2% all'anno degli Stati Uniti.

Possiamo quindi sorprenderci di questi dati alla luce del modello di Solow che abbiamo finora presentato? Come già anticipato, se consideriamo un'economia che inizialmente si trovi in uno stato stazionario, e supponiamo che una guerra distrugga parte del suo capitale (nel grafico 6.3, lo stock di capitale si riduce da k^* a k_1), ciò determinerà chiaramente una immediata riduzione del livello di produzione. Tuttavia, finché il saggio di risparmio rimane invariato – finché cioè rimane invariata la frazione del prodotto risparmiata, e quindi investita – l'economia tornerà alla fine al suo vecchio livello di stato stazionario, attraverso un periodo di crescita economica. Ciò avverrà perché, in corrispondenza della minore disponibilità di capitale, gli investimenti effettuati risultano superiori agli ammortamenti. In altre parole, il prodotto aumenta perché gli investimenti aggiungono più capitale di quanto non ne scompaia per via degli ammortamenti.

Quindi, la distruzione di parte dello stock di capitale nell'immediato riduce la produzione, ma a ciò fa seguito un periodo di crescita economica superiore. Quello che sui giornali economici viene spesso descritto come il “miracolo” della rapida crescita di Giappone e Germania è in vario modo ciò che il modello di Solow conduce a prevedere per quei paesi il cui capitale sia stato grandemente ridotto per una calamità naturale o un evento bellico. La spiegazione della crescita giapponese e tedesca non è tuttavia così semplice. Entrambi i paesi presentano anche saggi di risparmio assai elevati, ma non omogenei, per cui tendono a raggiungere livelli differenti di capitale di stato stazionario. Pertanto, per una comprensione più completa delle determinanti che influenzano il raggiungimento del livello di capitale di stato stazionario, dobbiamo considerare gli effetti derivanti dalla fissazione di differenti saggi di risparmio.

Possiamo ora costruire un esempio numerico per dimostrare come l'economia si avvicina allo stato stazionario. Assumiamo, innanzitutto, una quota di remunerazione del capitale pari a $1/2$. Ciò significa assumere la funzione di produzione pro capite in (6.5) nella forma

$$y = k^{1/2}$$

dove appunto $\alpha = 1/2$. Inoltre, assumiamo che venga risparmiato il 30% del prodotto (ossia, $s=0,3$), che ogni anno il 10% dello stock di capitale giunga al termine della sua vita economica ($\delta=0,1$), e che l'economia inizi con 4 unità di capitale per lavoratore ($k=4$). Coi dati in nostro possesso, possiamo quindi ricostruire l'evoluzione dell'accumulazione del capitale nel corso del tempo, fino al raggiungimento dell'equilibrio di stato stazionario, quando cioè il processo di accumulazione si arresta, come riassunto nella successiva Tabella 6.1.

TABELLA 6.1. La tendenza allo steady state: un esempio numerico

Anno	k	y	c	i	δk	Δk
1	4,000	2,000	1,400	0,600	0,400	0,200
2	4,200	2,049	1,435	0,615	0,420	0,195
3	4,395	2,096	1,467	0,629	0,440	0,189
4	4,584	2,141	1,499	0,642	0,458	0,184
5	4,768	2,184	1,529	0,655	0,477	0,178
.						
10	5,602	2,367	1,657	0,710	0,560	0,150
.						
100	8,962	2,994	2,096	0,898	0,896	0,002
.						
∞	9,000	3,000	2,100	0,900	0,900	0,000

Per iniziare, osserviamo che 4 unità di capitale pro capite permettono al primo anno di ottenere 2 unità di prodotto per lavoratore. Poiché il 70% del prodotto è consumato, e il 30% è risparmiato e investito, allora $c=1,4$ e $i = 0,6$. Inoltre, poiché il 10% dello stock di capitale va fuori uso, $\delta k = 0,4$. Essendo gli investimenti pari a 0,6 e gli ammortamenti pari a 0,4, la variazione dello stock di capitale è $\Delta k = 0,2$. Pertanto, all'inizio del secondo anno l'economia disporrà di 4,2 unità di capitale pro capite.

La Tabella 6.1 mostra l'evoluzione dell'economia, ripetendo l'analisi che abbiamo appena effettuato, nel corso degli anni futuri, fino al raggiungimento dello steady state. Ogni anno, infatti, il capitale e la quantità prodotta aumentano. Su un periodo di molti anni, l'economia raggiunge uno stato stazionario con 9 unità di capitale per lavoratore. Quando ciò avviene, investimenti e ammortamenti si bilanciano esattamente, essendo entrambi pari a 0,9, cosicché, a quel punto, lo stock di capitale e di conseguenza il prodotto cessano di aumentare.

Per trovare lo stock di capitale di stato stazionario esiste un metodo meno laborioso rispetto all'analisi numerica testé condotta. Infatti, poiché in steady state deve necessariamente verificarsi la condizione $\Delta k = 0$, la (6.11) si può riscrivere nella forma

$$(6.12) \quad sf(k^*) = \delta k^*$$

che costituisce l'espressione attraverso la quale derivare il livello di capitale di stato stazionario, k^* .

Sostituendo in questa equazione i dati del nostro esempio, otteniamo

$$0,3 k^{*1/2} = 0,1 k^*$$

ossia, semplificando e riordinando,

$$k^{*1/2} = 3$$

ovvero, elevando al quadrato entrambi i membri:

$$k^* = 9$$

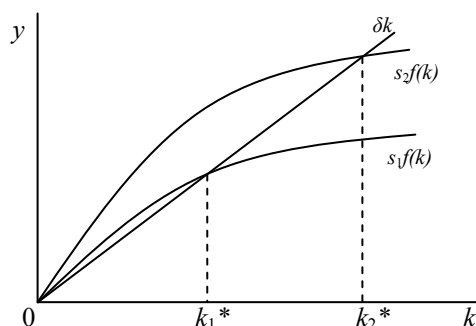
ciò conferma il risultato a cui conducono i calcoli nella Tabella 6.1, ossia che lo stock di capitale di equilibrio di stato stazionario è pari a 9 unità per lavoratore.

5. Il ruolo dei diversi saggi di risparmio

Consideriamo ora ciò che accade in un'economia quando il saggio di risparmio aumenta. Gli effetti di questo cambiamento sono illustrati nel grafico 6.4. Assumiamo che l'economia si trovi inizialmente in corrispondenza dello stato stazionario corrispondente al saggio di risparmio s_1 , quindi con uno stock di capitale pari a k_1^* . Ipotizziamo poi un aumento del saggio di risparmio da s_1 a s_2 , che determina una traslazione verso l'alto della curva $sf(k)$.

Al saggio di risparmio iniziale, s_1 , e per lo stock di capitale iniziale, k_1^* , l'ammontare degli investimenti bilancia esattamente gli ammortamenti. Nel momento in cui il saggio di risparmio aumenta, anche gli investimenti aumentano, mentre lo stock di capitale e gli ammortamenti rimangono temporaneamente invariati. Pertanto, gli investimenti ora eccedono gli ammortamenti. Lo stock di capitale aumenterà gradualmente finché l'economia non avrà raggiunto il nuovo livello di steady state, in corrispondenza del nuovo stock di capitale, k_2^* .

GRAFICO 6.4. *La variazione del saggio di risparmio*



Il modello di Solow mostra pertanto che il saggio di risparmio risulta essere una determinante fondamentale dello stock di capitale di stato stazionario. Se il saggio di risparmio è elevato, l'economia finirà col disporre di un maggiore stock di capitale, e con l'ottenere un aumento più significativo del prodotto nazionale. Al contrario, se il saggio di risparmio è basso, l'economia disporrà di un minore stock di capitale e otterrà un incremento del PIL più limitato.

L'evidenza empirica internazionale risulta coerente con la predizione del modello di Solow, secondo cui il saggio di risparmio è un'importante determinante della ricchezza di un paese. Infatti, paesi con alti tassi di risparmio, come gli Stati Uniti, il Giappone e l'Italia, generalmente godono di redditi elevati, mentre paesi con bassi livelli di risparmio, come l'Etiopia, lo Zaire o il Ciad hanno bassi redditi pro capite.

Dall'analisi condotta, si evince quindi una relazione positiva tra risparmio e crescita economica. Risparmi maggiori conducono a una crescita più elevata. Ma questo processo non è di per sé indefinito. Infatti, un aumento del saggio di risparmio innalza la crescita finché l'economia non raggiunge il nuovo stato stazionario. Solo se l'economia registra permanentemente un saggio di risparmio crescente, riuscirà anche a ottenere un costante incremento dei suoi tassi di crescita. Va però notato che benché la correlazione tra saggio di investimento e reddito pro capite sia forte, e ci aiuti a capire perché alcuni paesi sono più ricchi di altri, essa non esaurisce completamente la spiegazione dell'argomento. Esistono infatti paesi che, pur avendo saggi di risparmio simili, come in Messico e Zambia, esibiscono diversi livelli di crescita. Infatti, il reddito pro capite messicano è dieci volte più alto di quello del paese africano. Devono esserci quindi altre determinanti che spieghino il tenore di vita di un paese, oltre ai volumi del risparmio e dell'investimento. L'analisi che segue si occupa appunto di studiare l'evoluzione dei profili del consumo di un'economia, e fornisce la regola da seguire, e la politica economica da implementare, per la massimizzazione dei livelli di benessere di una società.

6. Il livello di capitale di regola aurea e la dinamica di transizione

Fin qui abbiamo utilizzato il modello di Solow per studiare come i saggi di risparmio e di investimento in un'economia determinano lo stock di capitale (e di prodotto) di stato stazionario. La conclusione a cui si può giungere è che quanto più il saggio di risparmio è elevato tanto meglio è per l'economia. Ma se immaginiamo che un paese abbia un tasso di risparmio del 100%, in base al modello ciò dovrebbe portare al maggiore livello possibile di capitale e di reddito. Ciò implicherebbe però un livello nullo dei consumi, perché tutto il reddito viene destinato al risparmio, e un conseguente impatto negativo sul profilo di benessere degli agenti economici.

L'obiettivo deve essere dunque di stabilire, all'interno del modello di Solow, quale sia il livello ottimo di accumulazione del capitale, che garantisca altresì la massimizzazione del benessere economico della collettività, e stabilire le decisioni di politica economica necessarie al perseguimento di tale finalità.

Nello scegliere uno stato stazionario, l'obiettivo del governo dev'essere quello di massimizzare il benessere degli individui che fanno parte della società. Gli agenti economici, infatti, non sono interessati alla quantità di capitale disponibile nel sistema economico, e nemmeno al livello della produzione aggregata. Ciò che importa loro è la quantità di beni e servizi che possono consumare. Dunque, obiettivo del decisore pubblico dovrà essere il raggiungimento di uno stato stazionario in cui il consumo risulti massimo. Come è possibile stabilire se un'economia si trova a tale livello di capitale ottimale? Per rispondere a questa domanda, dobbiamo dapprima determinare il livello di consumo pro capite in steady state, e successivamente stabilire lo stato stazionario che massimizzi il livello di consumo. Dalla (6.6) possiamo facilmente ricavare

$$(6.13) \quad c = y - i$$

dove il consumo non è altro che la differenza tra il reddito prodotto e il volume di investimenti. Dato che vogliamo individuare il consumo di stato stazionario, possiamo sostituire i valori che il prodotto e l'investimento esibiscono in steady state, cosicché

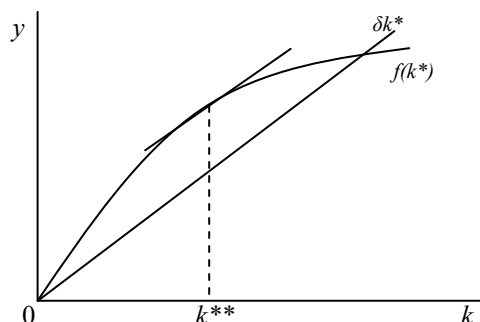
$$(6.14) \quad c = f(k^*) - \delta k^*$$

per cui il consumo pro capite di stato stazionario rappresenta ciò che rimane del prodotto di steady state dopo averne pagato gli ammortamenti corrispondenti. L'equazione (6.14) mette anche in evidenza due effetti contrastanti. Infatti, all'aumentare del capitale il prodotto totale necessariamente viene incrementato, ma aumentano anche gli ammortamenti, perché maggiore sarà la quota di capitale da sostituire per effetto del logorio dovuto al suo utilizzo nel processo produttivo.

Il successivo grafico 6.5 ci consente di rappresentare simultaneamente la funzione di produzione e la retta dell'ammortamento, definite entrambe in stato stazionario. Ci accorgiamo subito che esiste un unico livello di capitale, denominato in letteratura come *capitale di regola aurea*, che garantisce anche la massimizzazione del consumo. Indicheremo questo valore con la variabile k^{**} .

Immaginiamo di partire da un livello di capitale pro capite inferiore a quello di regola aurea. In tal caso, un aumento del capitale fa aumentare il prodotto in misura maggiore dell'ammortamento, e quindi fa aumentare anche il consumo pro capite. Ciò è dovuto al fatto che la funzione di produzione è più ripida della retta degli ammortamenti, perciò la distanza tra le due curve, pari al consumo, aumenta all'aumentare del capitale. Al contrario, se si parte con uno stock di capitale superiore a quello di regola aurea, la pendenza della funzione di produzione è minore del tasso di ammortamento, che misura la pendenza della retta degli ammortamenti, e pertanto la distanza tra le due curve diminuisce all'aumentare del capitale accumulato. Ovviamente, in corrispondenza del livello di capitale di regola aurea, k^{**} , la funzione di produzione e la retta degli ammortamenti hanno la medesima pendenza, e il consumo risulta al suo livello massimo.

GRAFICO 6.5. *Il capitale della regola aurea*



Possiamo quindi facilmente ricavare la condizione che caratterizza il livello di capitale di regola aurea. Derivando la funzione del consumo rispetto al capitale nella (6.14), e uguagliando a zero l'espressione così ottenuta, in corrispondenza del capitale di regola aurea, k^{**} , otteniamo la seguente condizione

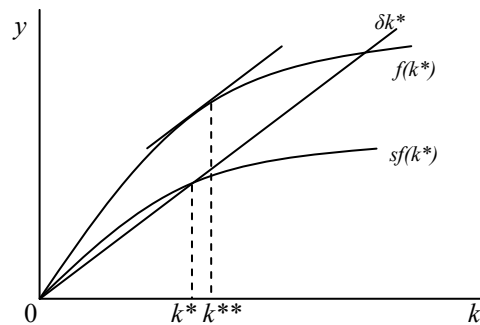
$$(6.15) \quad f'(k^{**}) = \delta$$

da cui emerge come il prodotto marginale del capitale, rappresentato dalla derivata della funzione di produzione rispetto al capitale, deve essere uguale al tasso di ammortamento, affinché il consumo pro capite raggiunga il suo livello massimo.

È bene però notare che il capitale di regola aurea non necessariamente corrisponde al capitale di stato stazionario. Come abbiamo già anticipato, l'economia tende naturalmente al livello di stato stazionario, ma ciò non vale anche per il livello del capitale di regola aurea. Dobbiamo quindi chiederci quali siano le ragioni che fanno sorgere questa differenza. Matematicamente, ciò si spiega dal fatto che mentre la condizione di stato stazionario è data dalla (6.12), quella di regola aurea è definita dalla (6.15). Ci serviamo a tal fine del successivo grafico 6.6, dove ipotizziamo di avere un capitale di regola aurea pari a k^{**} . In questo caso, ci troviamo in una zona in cui gli ammortamenti superano i risparmi (e gli investimenti), cosicché il capitale a disposizione nei periodi futuri si riduce, fino a riportare il suo livello in corrispondenza dello stato stazionario, k^* . Ma così facendo, anche il volume dei consumi si è ridotto perché la diminuzione del capitale riduce la produzione, e contrae di conseguenza il reddito disponibile per le spese nel mercato.

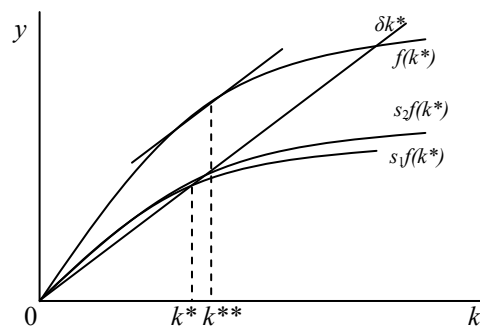
Ci troviamo così di fronte a un *trade-off* tra il livello di capitale di lungo periodo, verso cui il sistema economico tende ad evolvere naturalmente in steady state, e il rispetto dell'obiettivo di massimizzazione del consumo, che implica il rispetto della regola aurea. Di questo contrasto tra obiettivi di politica economica il decisore pubblico dovrà tener conto per adottare gli interventi che garantiscano il massimo benessere per la collettività che governa.

GRAFICO 6.6. *Stato stazionario e regola aurea*



Ipotizziamo ora uno scenario economico come quello rappresentato nel grafico 6.7. dove il saggio di risparmio iniziale è pari a s_1 . Come già anticipato, in questo caso otteniamo un livello del capitale di regola aurea superiore a quello di steady state. Se il governo riuscisse a stimolare il risparmio delle famiglie, e il saggio di risparmio salisse al livello s_2 , la funzione di risparmio traslerebbe verso l'alto, incrociando ora la retta dell'ammortamento in corrispondenza del livello di capitale k^{**} .

GRAFICO 6.7. *Saggio di risparmio e regola aurea*



In sostanza, una modifica del saggio di risparmio delle famiglie può permettere di accumulare quel maggiore livello di capitale che consente di aumentare la produzione, e incrementare il reddito disponibile nella misura che risulta necessaria per aumentare il volume del consumo, che raggiunge così il suo livello massimo implicato dalla regola aurea.

Riprendiamo ora l'esempio numerico costruito in precedenza, e relativo al calcolo del capitale di stato stazionario, con l'obiettivo di applicare la condizione che permetta il raggiungimento della regola aurea. Consideriamo di nuovo la funzione di produzione nella forma

$$y = k^\alpha = k^{1/2}$$

dove $\alpha = 1/2 = 0,5$. Sappiamo che, assumendo un saggio di risparmio pari al 30% del prodotto ($s=0,3$), e un tasso di ammortamento del 10% ($\delta=0,1$), l'economia evolve fino a un livello di capitale di stato stazionario $k^* = 9$. Vediamo se questo valore corrisponde o diverge da quello di regola aurea.

Applicando la condizione (8.15) al nostro esempio, possiamo ricavare che

$$0,5k^{-1/2} = 0,1$$

poiché $f'(k) = \alpha k^{\alpha-1}$.

Semplici passaggi algebrici ci permettono di ottenere il livello di capitale di regola aurea

$$k^{**} = 25$$

che risulta quindi superiore rispetto al capitale di stato stazionario.

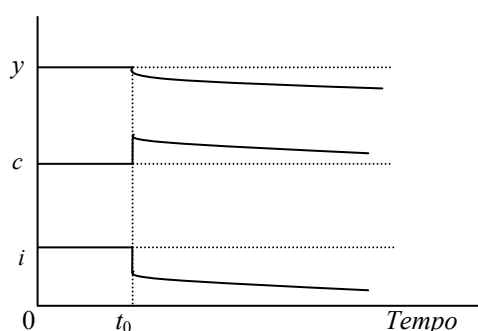
Se il governo potesse semplicemente scegliere uno dei possibili stati stazionari dove far collocare la sua economia, senza dubbio opterebbe per quello stato stazionario a cui corrisponde il massimo livello di consumo, ossia il livello di regola aurea, così da garantire il maggiore benessere per la collettività che amministra. Se però l'economia si dovesse trovare con un livello di capitale diverso da quello previsto dalla regola aurea, dovremo capire quali variazioni dovranno subire i livelli di consumo, di risparmio e di capitale nel processo di transizione verso l'equilibrio desiderato.

È necessario a tal proposito considerare qui di seguito due possibili casi. L'economia, infatti, potrebbe partire da un livello di capitale iniziale di steady state superiore o inferiore a quello di regola aurea. Le due tipologie presentano problematiche diverse per il governo, in termini di impatto che le politiche economiche necessarie a raggiungere l'equilibrio di regola aurea possono avere sul benessere delle diverse coorti generazionali che compongono il sistema economico.

Esaminiamo per primo il caso di un'economia che si trovi in uno stato stazionario in cui lo stock di capitale è superiore al livello di regola aurea. Il governo dovrebbe perseguire una politica economica mirata alla riduzione del saggio di risparmio per far contrarre lo stock di capitale esistente. Ipotizziamo che i provvedimenti varati dal governo abbiano successo, e che in un dato momento, che indicheremo con t_0 , il saggio di risparmio diminuisca al livello che potrà condurre allo stato stazionario di regola aurea. La dinamica di transizione che si diparte dall'istante t_0 è descritta nel

grafico 6.8, dove si riportano le variazioni subite dal reddito, dal consumo e dall'investimento dopo la decisione di ridurre il saggio di risparmio.

GRAFICO 6.8. *La transizione verso la regola aurea: il caso $k^* > k^{**}$*

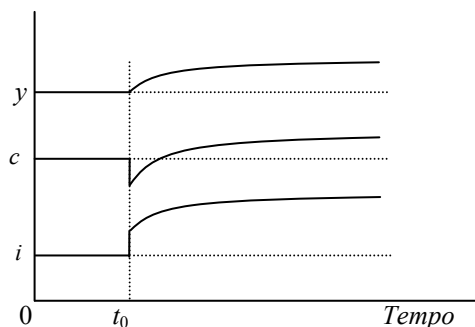


La riduzione del saggio di risparmio provoca un immediato aumento del consumo e una corrispondente diminuzione dell'investimento. Nello stato stazionario iniziale, l'investimento era uguale all'ammortamento; dopo la diminuzione del saggio di risparmio, l'investimento è minore dell'ammortamento e l'economia non si trova più in steady state. Gradualmente, lo stock di capitale diminuisce, portando a una riduzione dell'output prodotto, del consumo e dell'investimento. Queste variabili continuano a diminuire fino a quando l'economia raggiunge un nuovo stato stazionario. Dato che, per ipotesi, il nuovo stato stazionario corrisponde a quello di regola aurea, il consumo sarà superiore al livello di partenza, sebbene prodotto e investimento risultino più bassi.

Si può osservare che, rispetto allo stato stazionario precedente, il livello del consumo pro capite è superiore non soltanto nel nuovo stato stazionario, ma anche durante tutto il processo di transizione. Se lo stock di capitale è superiore al livello di regola aurea, una politica economica volta a ridurre il saggio di risparmio è sicuramente popolare, dato che permette di raggiungere un livello dei consumi sicuramente superiore rispetto a quello iniziale in tutte le fasi del processo di transizione.

Supponiamo, invece, che l'economia parta con uno stock di capitale inferiore al livello di regola aurea. Questa è la situazione nella quale si trova la maggior parte dei sistemi economici reali. In questo caso, il governo deve aumentare il saggio di risparmio per accumulare capitale fino a raggiungere lo stato stazionario di regola aurea. Il grafico 6.9 illustra ciò che accade.

GRAFICO 6.9. *La transizione verso la regola aurea: il caso $k^* < k^{**}$*



Un aumento del saggio di risparmio al tempo t_0 provoca una caduta immediata del consumo e un corrispondente aumento dell'investimento. Con il trascorrere del tempo, l'aumento dell'investimento provoca un aumento dello stock di capitale. Con l'accumulazione di capitale, l'output prodotto, il consumo e l'investimento aumentano progressivamente, fino a raggiungere un nuovo stato stazionario. Dato che, per ipotesi, il nuovo steady state corrisponde a quello di regola aurea, il consumo sarà superiore al livello di partenza.

Dobbiamo a questo punto chiederci: l'incremento del saggio di risparmio che permette di raggiungere lo stato stazionario di regola aurea provoca un aumento del benessere economico? Al termine del processo di transizione, la risposta è sicuramente sì, perché il nuovo livello del consumo pro capite è maggiore del livello di partenza; ma durante il processo di transizione si verifica una contrazione del consumo. Si presenta quindi una situazione più controversa rispetto al primo caso, dove i livelli di consumo a disposizione dell'economia sono sempre più elevati del livello iniziale in tutta la fase di transizione.

Pertanto, quando l'economia parte da uno stock di capitale superiore al livello di regola aurea, la transizione provoca un aumento immediato del consumo; quando parte da uno stock di capitale inferiore, la transizione verso la regola aurea richiede una iniziale contrazione del consumo per raggiungere un livello superiore solo alla fine del processo di convergenza verso l'equilibrio finale ottimo.

Nel decidere se cercare di raggiungere lo stato stazionario di regola aurea, il governo deve tenere conto del fatto che i consumatori di oggi non sempre coincidono con quelli di domani. Il raggiungimento dello stock di stato stazionario di regola aurea comporta sicuramente un livello più elevato di consumo per le generazioni future, ma se l'economia parte da uno stock di capitale inferiore al livello di regola aurea, il processo di transizione comporta una contrazione dei consumi per le generazioni attuali. Dunque, nel decidere se incentivare l'accumulazione del capitale, il governo deve fare una scelta di compromesso tra il benessere di generazioni diverse: un governo interessato più alla generazione

corrente che a quelle future potrebbe decidere di non cercare di raggiungere lo stato stazionario di regola aurea, e non stimolare il maggiore risparmio della famiglie di consumatori attuali; viceversa, un governo preoccupato più del benessere delle generazioni future che di quella corrente tenderà a optare per la transizione, favorendo un incremento dei saggi di risparmio, e un conseguente minore livello di consumi della generazione corrente, così da permettere alle generazioni future di trarre beneficio dall'aver raggiunto uno stato stazionario di regola aurea, con un capitale accumulato più elevato e un livello dei consumi maggiore. In conclusione, l'accumulazione ottima di capitale dipende in misura cruciale dal peso attribuito agli interessi delle generazioni attuali e future. La regola aurea della Bibbia dice: «Fa' agli altri ciò che vorresti fosse fatto a te stesso». Se seguissimo questo consiglio, attribuiremmo a tutte le generazioni il medesimo peso. In questo caso, la scelta ottimale sarebbe quella di raggiungere lo stato stazionario di regola aurea.

7. Gli effetti della crescita demografica

La versione di base del modello di Solow fin qui esposta ha dimostrato come l'accumulazione di capitale da sola non possa spiegare una crescita economica sostenuta e persistente: un aumento del saggio di risparmio fa aumentare temporaneamente il tasso di crescita, ma prima o poi l'economia raggiunge uno stato stazionario in cui il capitale e il prodotto pro capite sono costanti. Per spiegare la crescita economica persistente che osserviamo in molte aree del mondo dobbiamo espandere il modello di Solow, incorporandovi due elementi: la crescita demografica e il progresso tecnologico.

Come già anticipato, ai fini dell'analisi che vogliamo qui condurre, ci limiteremo a integrare il modello di base solamente con gli effetti della crescita demografica. Pertanto, invece di ipotizzare che la popolazione sia fissa, come abbiamo fatto in precedenza, assumiamo ora che la popolazione (e la forza lavoro) crescano a un tasso costante, n . Per stabilire come la crescita demografica, insieme all'investimento e all'ammortamento, influenzi l'accumulazione di capitale pro capite, dobbiamo considerare l'impatto che una variazione nel numero di lavoratori provoca sul capitale pro capite. Assumiamo infatti che, se il numero di lavoratori sale, necessariamente la quantità di capitale a disposizione per ciascun lavoratore diminuisce. La definizione matematica del capitale pro capite, $k = K/L$, ci aiuta a visualizzare facilmente quanto assunto: se la forza lavoro, L , aumenta, il capitale pro capite, k , si riduce.

Dobbiamo allora riconsiderare le equazioni del modello, per tenere conto degli effetti della crescita demografica. Innanzitutto, l'equazione (6.11) diverrà

$$(6.16) \quad \Delta k = sf(k) - \delta k - nk$$

poiché la variazione del capitale pro capite, che dipende sempre positivamente dagli investimenti, $sf(k)$, risentirà di un doppio effetto negativo provocato sia dalla quota

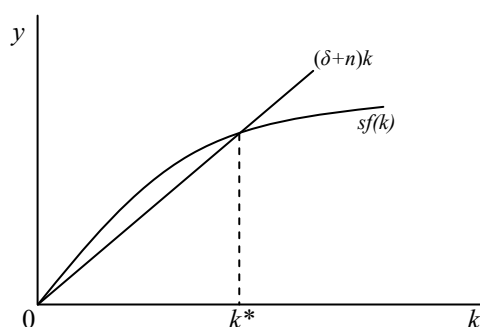
di ammortamenti sia dal maggior numero di lavoratori che si appropria di maggiori quote di capitale esistente.

In equilibrio di stato stazionario, la (6.16) diventa

$$(6.17) \quad sf(k^*) = (\delta + n)k^*$$

da cui si deduce come l'investimento di equilibrio deve coprire la quota di ammortamento del capitale esistente, ma anche la quantità di investimento necessaria per dotare ogni nuovo lavoratore di quote di capitale. L'equazione (6.17) mostra quindi come la crescita demografica riduca l'accumulazione di capitale pro capite, esattamente come fa l'ammortamento: l'ammortamento riduce il capitale con il logoramento dovuto all'uso, mentre la crescita demografica riduce il capitale distribuendo un dato stock di capitale su una popolazione di lavoratori più numerosa. Il grafico 6.10 illustra a tal riguardo l'effetto della crescita demografica sull'equilibrio di stato stazionario, ampliando lo schema espositivo del grafico 6.3.

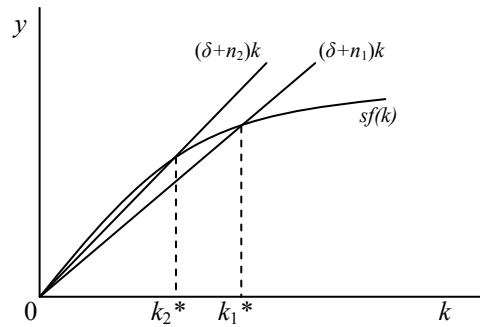
GRAFICO 6.10. *Stato stazionario e crescita demografica*



In questo caso, affinché l'economia sia in stato stazionario, l'investimento deve controbilanciare non solo gli effetti dell'ammortamento ma anche quelli della crescita demografica. Fatta questa precisazione aggiuntiva, l'analisi del processo di convergenza verso lo stato stazionario rimane invariata rispetto a quella svolta in precedenza. È interessante però evidenziare gli effetti che un aumento nella crescita della popolazione causa sull'equilibrio di steady state. Nel successivo grafico 6.11, ipotizziamo di trovarci in un equilibrio iniziale garantito da un tasso di crescita della popolazione n_1 , che dà luogo a un capitale pro capite di equilibrio, k_1^* .

Se ipotizziamo che la popolazione cresca a un tasso superiore, $n_2 > n_1$, la pendenza della retta aumenta, determinando una contrazione nel livello di capitale di stato stazionario. Questo implica anche un minore output prodotto e, di conseguenza, un minore livello del reddito pro capite a disposizione. Ciò contribuisce a spiegare perché paesi caratterizzati da elevati tassi di crescita della popolazione esibiscano anche livelli del PIL pro capite più bassi e minori livelli di crescita economica.

GRAFICO 6.11. *L'effetto dell'aumento della popolazione*

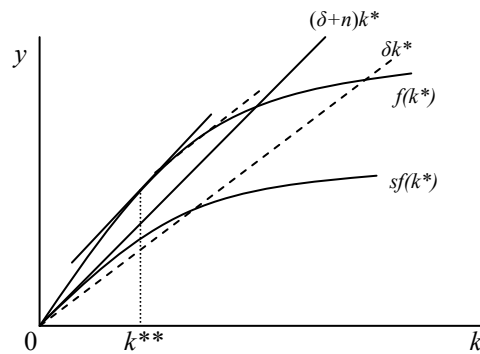


Lo stesso discorso vale relativamente al livello di benessere economico, riguardante il profilo del consumo delle società che esibiscono elevata crescita demografica. Seguendo lo stesso ragionamento fin qui svolto, anche la condizione di regola aurea in (6.15) dovrà essere riscritta come

$$(6.18) \quad f'(k^{**}) = \delta + n$$

e si giunge alla conclusione che il livello di capitale che massimizza il consumo implica una produttività marginale del capitale più alta, cui sarà associato un livello del capitale pro capite di equilibrio inferiore, così come riportato nel grafico 6.12.

GRAFICO 6.12. *Regola aurea e crescita demografica*



In conclusione, il modello della crescita di Solow che abbiamo qui illustrato ci permette di dimostrare che, nel lungo periodo, il saggio di risparmio di un'economia determina il suo stock di capitale di equilibrio e, di conseguenza, il volume della produzione. Quanto più elevato è il saggio di risparmio, tanto più elevati risultano

essere lo stock di capitale e il livello del prodotto aggregato. Si è potuto notare, inoltre, che un aumento del saggio di risparmio genera inizialmente un periodo di rapida crescita, ma prima o poi la crescita rallenta, e l'economia raggiunge un nuovo livello di stato stazionario. Pertanto, sebbene un elevato saggio di risparmio generi un elevato livello di prodotto pro capite di stato stazionario, esso non può garantire una crescita economica persistente.

Un altro punto cruciale osservato dal modello riguarda il benessere raggiunto dalla società. Infatti, il livello di capitale di regola aurea, quello cioè che massimizza il consumo di stato stazionario, può non coincidere col livello del capitale di stato stazionario. Si è dimostrato che se un'economia dispone di troppo capitale rispetto al livello di regola aurea, riducendo il saggio di risparmio si aumenta il livello del consumo immediatamente e permanentemente. Se invece il capitale è inferiore al livello di regola aurea, il processo di aggiustamento impone un periodo di investimenti sostenuti e, quindi, una contrazione temporanea dei consumi correnti. In quest'ultimo caso, risulta cruciale il rapporto di collaborazione che si instaura tra le diverse generazioni di consumatori. Da ultimo, abbiamo osservato che il tasso di crescita demografica di un'economia è un'altra variabile determinante per la crescita economica di lungo periodo. Secondo il modello di Solow, infatti, quanto più elevato è il tasso di crescita della popolazione, tanto più bassi saranno il livello di capitale per occupato e il prodotto aggregato pro capite, il che ci permette di spiegare le divergenze nei tassi di crescita che le economie possono sperimentare nelle diverse fasi del loro sviluppo.

8. Dalla contabilità della crescita al Residuo di Solow

Nell'analisi fin qui condotta sulle fonti della crescita economica si è assunto che la funzione di produzione non si modificasse nel corso del tempo. Ciò però non è coerente con quanto avviene nella realtà, dove la funzione di produzione risente degli effetti dovuti dalle variazioni del progresso tecnico. In sostanza, un miglioramento della tecnologia permette, con le stesse quantità di fattori produttivi, di ottenere più prodotto di quanto ne sia stato ottenuto in passato. Il ruolo del progresso tecnico diventa quindi determinante per una corretta contabilizzazione della crescita economica.

Iniziamo con assumere la seguente forma della funzione di produzione Cobb-Douglas:

$$Y = AK^{\alpha}L^{1-\alpha}$$

dove A rappresenta una misura dello stato corrente della tecnologia, nota anche in letteratura come *produttività totale dei fattori*. Il prodotto Y aumenta non soltanto a causa degli incrementi in capitale fisico e forza lavoro, ma anche per effetto della produttività totale dei fattori. Se la produttività aumenta dell'1%, e le quantità dei

fattori rimangono invariate, allora il prodotto aumenta anch'esso dell'1%.

La considerazione del progresso tecnico introduce un nuovo termine nell'equazione esplicativa della crescita economica

$$(6.19) \quad \frac{\Delta Y}{Y} = \frac{\Delta A}{A} + \alpha \frac{\Delta K}{K} + (1 - \alpha) \frac{\Delta L}{L}$$

che può essere descritta concettualmente nel seguente modo: la crescita del prodotto è uguale alla somma del contributo del capitale più il contributo del lavoro più ancora la crescita della produttività totale dei fattori.

L'equazione in (6.19) rappresenta quindi l'equazione chiave per la spiegazione della crescita economica. Essa identifica le tre fonti della crescita: le variazioni della quantità di capitale, le variazioni della quantità di lavoro e le variazioni della produttività totale dei fattori, permettendoci altresì di misurare il contributo di ognuna di esse alla crescita economica di un paese.

Poiché la produttività totale dei fattori non è direttamente osservabile, essa viene misurata per via indiretta. Disponendo, infatti, dei dati relativi alla crescita del prodotto nazionale, del capitale e del lavoro, e sapendo i dati relativi alla quota dei redditi da capitale sul prodotto, possiamo facilmente calcolare la crescita della produttività totale dei fattori servendoci della (6.19) esplicitata come

$$(6.20) \quad \frac{\Delta A}{A} = \alpha \frac{\Delta K}{K} + (1 - \alpha) \frac{\Delta L}{L} - \frac{\Delta Y}{Y}$$

dove $\Delta A/A$ rappresenta appunto la variazione del prodotto che non può essere spiegata dalle variazioni delle quantità dei fattori produttivi. Pertanto, la crescita della produttività totale dei fattori viene calcolata come *residuo*, vale a dire come ciò che rimane della crescita del prodotto dopo aver tenuto conto delle determinanti della crescita che possono essere misurate. A tal proposito, la componente $\Delta A/A$ prende anche il nome di *Residuo di Solow*, dal nome di Robert Solow che per primo mostrò come calcolarlo.

La successiva Tabella 6.2 mostra il contributo delle diverse fonti alla crescita economica degli Stati Uniti nel periodo 1950-1985.

TABELLA 6.2. *Le fonti della crescita economica negli Stati Uniti*

		Fonte della crescita					
	Crescita del prodotto		Capitale		Lavoro		Produttività totale dei fattori
$\alpha=0,3$	$\Delta Y/Y$	=	$\Delta K/K$	+	$\Delta L/L$	+	$\Delta A/A$
1950-1985	3.2%		1.1%		0.9%		1.2%

Dai dati emerge come il prodotto nazionale sia cresciuto in media del 3,2%, e che questa crescita vada attribuita per l'1,1% all'aumento dello stock di capitale, per lo

0,9% all'aumento delle ore di lavoro complessive, e per l'1,2% al progresso tecnico.

Come noto, la produttività totale dei fattori può variare per molte ragioni. Il più delle volte, tali variazioni derivano dall'introduzione di nuovi metodi produttivi, a seguito del miglioramento delle conoscenze tecnologiche su come produrre. È per questa ragione che il residuo di Solow viene spesso considerato come una misura del progresso tecnico. Ma la produttività totale dei fattori può essere influenzata anche da altre circostanze, come l'istruzione e la regolamentazione pubblica. Se, per esempio, una maggiore spesa pubblica migliora la qualità dell'istruzione, i lavoratori possono diventare più produttivi e il prodotto può aumentare, ciò che implica una più alta produttività totale dei fattori. Ancora, se i regolamenti pubblici impongono alle imprese di acquistare beni capitali che riducono le emissioni inquinanti o accrescono la sicurezza sul lavoro, allora lo stock di capitale potrebbe aumentare senza che si registri alcun aumento del prodotto, ciò che implica una diminuzione della produttività totale dei fattori. Pertanto, la produttività totale dei fattori tiene conto di ogni circostanza che modifichi la relazione tra fattori e prodotto, così come essi vengono misurati.

9. Il modello keynesiano di Harrod-Domar

In ambiente keynesiano, il raggiungimento di un equilibrio di piena occupazione presuppone che si intraprenda un ammontare di investimenti tale da portare la domanda effettiva globale al livello corrispondente alla piena utilizzazione della capacità produttiva. Ma proprio la decisione di intraprendere tale investimento causa un mutamento della situazione oggettiva su cui si basa l'equilibrio esistente. Nell'analisi keynesiana, dunque, proprio il raggiungimento dell'equilibrio in un determinato istante, lungi dal costituire il termine ultimo dell'indagine, apre un'intera serie di nuovi problemi sul come l'equilibrio stesso possa essere mantenuto. Un'analisi dinamica diviene pertanto inevitabile. Fu merito degli economisti Roy Harrod e Evsey Domar lo sviluppo di un modello con l'obiettivo di estendere l'analisi macroeconomica keynesiana ai problemi della crescita nel lungo periodo.³

Il modello di Harrod-Domar si basa su una funzione a coefficienti fissi con due soli fattori produttivi, capitale (K) e lavoro (L), strettamente complementari e non sostituibili uno all'altro, rappresentabile nel seguente modo:

$$(6.21) \quad Y = \min(a_K K, a_L L)$$

a indicare il fatto che, in ciascun periodo, il prodotto potenziale è limitato dal fattore produttivo meno abbondante, e dove le costanti a_K e a_L rappresentano rispettivamente le produttività marginali del capitale e del lavoro.

³ Per maggiori approfondimenti, consultare R. Dornbusch et al., *Macroeconomia*, McGraw-Hill, 2014.

Si possono dunque verificare due definizioni di prodotto di piena occupazione, date da $Y_K = a_K K$ oppure $Y_L = a_L L$. Può dunque accadere che in un dato periodo si abbia $Y_K < Y_L$, ovvero che il prodotto potenziale sia limitato dal capitale disponibile, e che di conseguenza una parte della forza lavoro rimarrà disoccupata, non per scarsità della forza lavoro disponibile, ma per scarsità del capitale. Nel caso opposto, se $Y_L < Y_K$, il prodotto sarà invece limitato dalla forza lavoro disponibile, ed è quindi il capitale che rimarrà parzialmente inutilizzato.

Supponiamo che in partenza ambedue i fattori produttivi siano pienamente occupati e di essere in assenza di progresso tecnico, ossia che la produttività del lavoro, a_L , rimanga costante in tutti i periodi. Ne consegue che il *tasso naturale di crescita* dell'economia, g , che corrisponde alla variazione del prodotto, sarà dato semplicemente dalla relazione:

$$(6.22) \quad g = \Delta Y/Y = \Delta N/N = n$$

dove n rappresenta il tasso di crescita della popolazione (che viene fatta coincidere con la forza lavoro). Quindi, g rappresenta il tasso di crescita del prodotto necessario per mantenere la piena occupazione del fattore lavoro.

Consideriamo ora il lato del capitale. Le nuove unità di lavoro che entrano nel sistema economico saranno in grado di produrre solo se dotate del capitale richiesto dalla tecnologia vigente, e pertanto anche K dovrebbe crescere al tasso n . L'accumulazione del capitale è però soggetta al rispetto della condizione di equilibrio tra investimenti e risparmi che, come già detto, equivale all'equilibrio fra domanda e offerta aggregate. Se quindi supponiamo di trovarci in un'economia chiusa, e senza l'intervento della pubblica amministrazione, si dovrà avere $S = I$. Sappiamo però che $I = \Delta K + \delta K$, scomponendo gli investimenti lordi nella somma dell'investimento netto (ΔK) più l'ammortamento del capitale (δK); e che i risparmi vengono considerati come una frazione del reddito disponibile, ossia $S = sY$. Possiamo quindi sintetizzare la relazione di equilibrio fra risparmi e investimenti nella forma esplicita:

$$(6.23) \quad \gamma = \Delta K/K = sa_K - \delta$$

dove γ rappresenta il *tasso di crescita garantito dell'economia*, ed equivale al tasso di variazione del capitale, definito come prodotto del saggio di risparmi, s , per la produttività marginale del capitale, a_K , al netto del tasso di ammortamento, δ .

Come già osservato in precedenza, l'equilibrio dinamico del sistema richiederebbe l'uguaglianza del tasso di crescita naturale, g , e del tasso di crescita garantito, γ . In altri termini, capitale e lavoro, che in partenza abbiamo assunto essere pienamente occupati, dovrebbero crescere allo stesso tasso dato da

$$(6.24) \quad n = sa_K - \delta$$

altrimenti sorgerebbero situazioni di eccesso di capitale oppure di eccesso di lavoro.

10. Il disequilibrio dinamico del modello di Harrod-Domar

Come analizzato nel paragrafo precedente, poiché i parametri del modello di Harrod-Domar sono assunti costanti, e pertanto non modificabili, l'uguaglianza $g = \gamma$ diventa assai improbabile, aprendo la strada a possibili situazioni di disequilibrio, nel caso cioè in cui

$$(6.25) \quad g > \gamma \text{ ossia } n > sa_K - \delta$$

oppure

$$(6.26) \quad g < \gamma \text{ ossia } n < sa_K - \delta$$

Il caso descritto nella (6.25) è tipico dei *Paesi poveri*, dove la popolazione e quindi la forza lavoro tendono a crescere a tassi elevati. Nello stesso tempo, la propensione al risparmio è bassa, poiché gran parte del reddito viene destinata ai consumi essenziali. Il tasso di accumulazione del capitale non è pertanto in grado di far fronte alla crescita demografica, cosicché una quota crescente della forza lavoro rimarrebbe disoccupata. Si tratta però di una disoccupazione *strutturale*, che non può essere eliminata da politiche di stimolo della domanda aggregata, che non farebbe altro che produrre effetti inflazionistici, poiché si scontrerebbe con la carenza di capitale disponibile accumulato.

Nel caso opposto, descritto dalla (6.26), tipica dei *Paesi ricchi*, la popolazione cresce a un tasso relativamente basso, con un tasso di natalità caduto più o meno al livello del tasso di mortalità, ma la propensione al risparmio, essendo il reddito disponibile più elevato, assume valori molto alti, facendo sì che l'accumulazione di capitale superi il tasso di crescita della forza lavoro. Questa situazione, caratterizzata dalla scarsità relativa di occupati, comporterà una crescente capacità produttiva inutilizzata. Si potrebbero quindi alternare periodi di tensioni inflazionistiche, provocate dall'eccesso di domanda di lavoro, e dai conseguenti aumenti salariali, con periodi di politiche monetarie e fiscali restrittive, che porteranno alla caduta degli investimenti, della produzione e dell'occupazione. In questo contesto si formerà una disoccupazione di carattere *congiunturale*, che sarà assorbita dalle successive fasi di ripresa economica, ma che si riprodurrà in seguito a nuove crisi.

La condizione ideale di eguaglianza dei tassi di crescita dà luogo al noto caso economico di "equilibrio sul filo del rasoio", poiché basterebbe una lieve variazione di uno dei parametri del modello per far precipitare il sistema in una delle due situazioni di disequilibrio sopra descritte, senza alcuna forza endogena in grado di riportarlo verso il sentiero di crescita bilanciata. In conclusione, quindi, il modello di Harrod-Domar può rappresentare la dinamica duale di crescente divergenza nei tassi di crescita tra i Paesi del Nord e del Sud del mondo, ovvero tra Paesi ricchi e Paesi poveri, esemplificandone l'instabilità nella dinamica di crescita di lungo periodo.